

## おねえさん問題の乱択近似

---

柴田友樹<sup>1</sup>, 山内由紀子<sup>2</sup>, 来嶋秀治<sup>2</sup>, 山下雅史<sup>2</sup>

九州大学 工学部電気情報工学科 (1:研究当時)

大学院システム情報科学研究所 (2)

### [参照]

- 柴田友樹, 山内由紀子, 来嶋秀治, 山下雅史, 格子上の経路数え上げの乱択近似--24時間で解くおねえさん問題, 2015年度 冬のLAシンポジウム, 京都大学数理解析研究所, 2016年1月28日.
- 柴田友樹, 格子上の経路数え上げの乱択近似, 九州大学工学部電気情報工学科卒業論文, 2016年3月.



# おねえさん問題の答え( $n = 1 \sim 26$ )

0 1  
1 2  
2 12  
3 184  
4 8512  
5 1262816  
6 575780564  
7 789360053252  
8 3266598486981642  
9 41044208702632496804  
10 1568758030464750013214100  
11 182413291514248049241470885236  
12 64528039343270018963357185158482118  
13 69450664761521361664274701548907358996488  
14 227449714676812739631826459327989863387613323440  
15 226674568862672746374567396713098934866324885408319028  
16 68745445609149931587631563132489232824587945968099457285419306  
17 634481461123796397131029754079552440044943986866480693646369387855336  
18 1782112840842065129893384946652325275167838065704767655931452474605826692782532  
19 15233449717048799930807428103192296908994542553294555776029866737355060592877569255844  
20 3962892199823037560207299517133362502106339705739463771515237113377010682364035706704472064940398  
21 31374751050137102720420538137382214513103312193698723653061351991346433379389385793965576992246021316463868  
22 755970286667345339661519123315222619353103732072409481167391410479517925792743631234987038883317634987271171404439792  
23 5543542935237477009914318489061437930690379970964331332556958646484008407334885544566386924020875711242060085408513482933945720  
24 12371712231207064758338744862673570832373041989012943539678727080484951695515930485641394550792153037191858028212512280926600304581386791094  
25 8402974857881133471007083745436809127296054293775383549824742623937028497898215256929178577083970960121625602506027316549718402106494049978375604247408  
26 17369931586279272931175440421236498900372229588288140604663703720910342413276134762789218193498006107082296223143380491348290026721931129627708738890853908108906396

<http://oeis.org/A007764/b007764.txt>

余白

---

# 乱択近似のアイデア

本研究:

マルコフ連鎖モンテカルロ(MCMC)法を用いた  
乱択近似数え上げアルゴリズムの提案.

記法の準備

□  $\Omega = \{st \text{ 単純経路}\}$

□  $\mathcal{E}_k = \{\text{長さ}k\text{以下の}st \text{ 単純経路}\}$

( $k = 2n, 2n + 2, 2n + 4, \dots, L^*$ )

ただし,  $L^*$ は最長路の長さ:

$$L^* = \begin{cases} (n+1)^2 - 1 & (n \text{ が奇数}) \\ (n+1)^2 - 2 & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$

つまり, 求めたいものは  $|\Omega| (= |\mathcal{E}_{L^*}|)$ .

自己帰着(self-reducibility)

$$|\mathcal{E}_{L^*}| = \frac{|\mathcal{E}_{L^*}|}{|\mathcal{E}_{L^*-2}|} \cdot \frac{|\mathcal{E}_{L^*-2}|}{|\mathcal{E}_{L^*-4}|} \cdots \frac{|\mathcal{E}_{2n+4}|}{|\mathcal{E}_{2n+2}|} \cdot \frac{|\mathcal{E}_{2n+2}|}{|\mathcal{E}_{2n}|} \cdot |\mathcal{E}_{2n}|$$

逆数を考えると...

アイデア 2.

$$\frac{|\mathcal{E}_k|}{|\mathcal{E}_{k+2}|} = [\mathcal{E}_{k+2} \text{ の中で長さ}k\text{以下の}s-t\text{単純経路の割合}]$$

アイデア 1.

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_{2n}| &= \text{最短経路の個数} \\ &= \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

# 乱択近似アルゴリズム

パラメータ：

$\tau$  (マルコフ連鎖の遷移回数) ,

$M$  (モンテカルロ法のサンプル) .

入力： $n$  (格子のサイズ) .

出力： $Z$  (経路総数の近似値) .

Set  $Z := 1$ ;

For ( $k = 2n + 2$ ;  $k < L^*$ ;  $k := k + 2$ ) {

Set  $X \in \Xi_k$ ; ( $X$ はマルコフ連鎖MCの初期状態)

Set  $S := 0$ ; ( $S$ はカウンター)

for( $i=0$ ;  $i < M$ ;  $i++$ ) {

for( $j=0$ ;  $j < \tau$ ;  $j++$ ) {

$X$ を更新(マルコフ連鎖の1回遷移)

}

if( $X \in \Xi_{k-2}$ )  $S++$ ;

}

Set  $Z := Z * \frac{M}{S}$ ;

}

Output  $Z$ ;

$\Xi_k$ からの一様サンプリング  
をしている

## 近似精度保証

### 定理

任意の  $\epsilon$  ( $0 < \epsilon < 1$ ) と任意の  $\delta$  ( $0 < \delta < 1$ ) に対して、 $\Xi_k$  ( $k = 2n, 2n + 2, \dots, L^*$ ) からの一様標本の数を  $M = 12n^3(2n^2\epsilon^{-1})^2 \ln(n^2\delta^{-1})$  とすると、近似解  $Z$  は

$$\Pr[(1 - \epsilon)|\Omega| \leq Z \leq (1 + \epsilon)|\Omega|] \geq 1 - \delta$$

を満たす。

余白

---

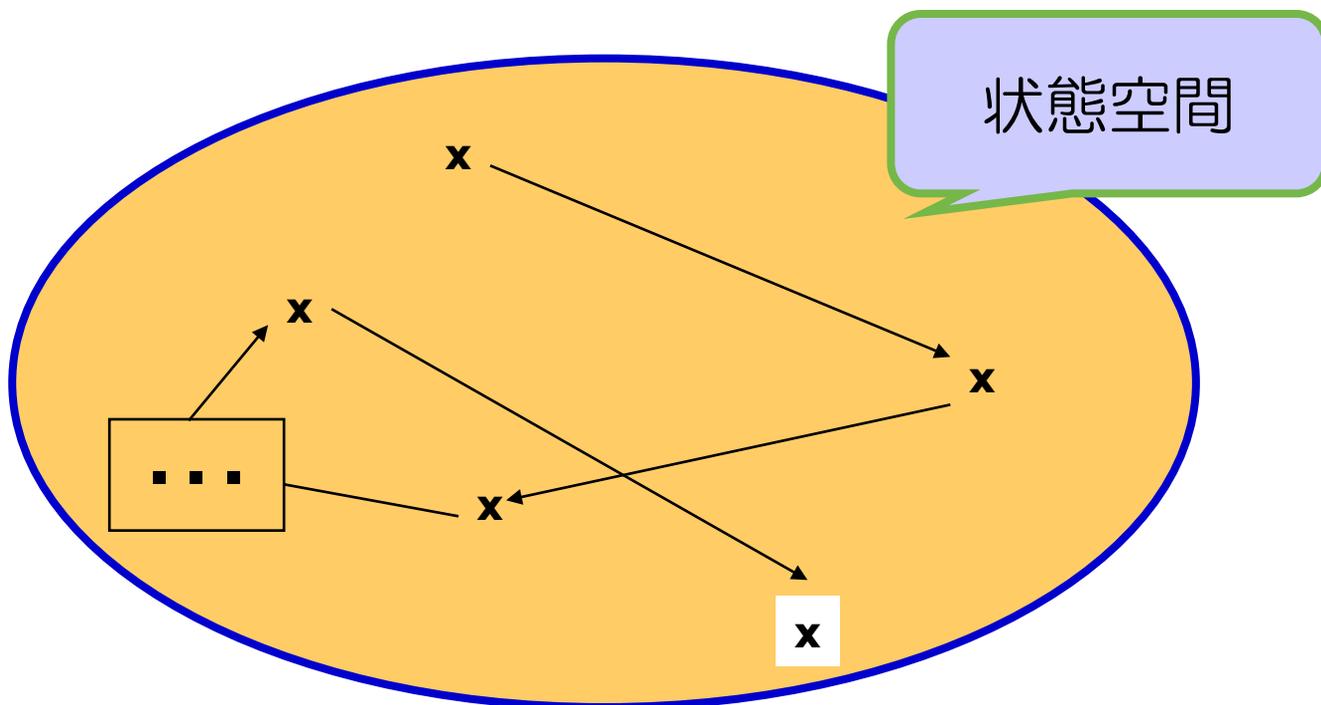
# マルコフ連鎖モンテカルロ法

目標

$\Xi_k$ からの一様サンプリング

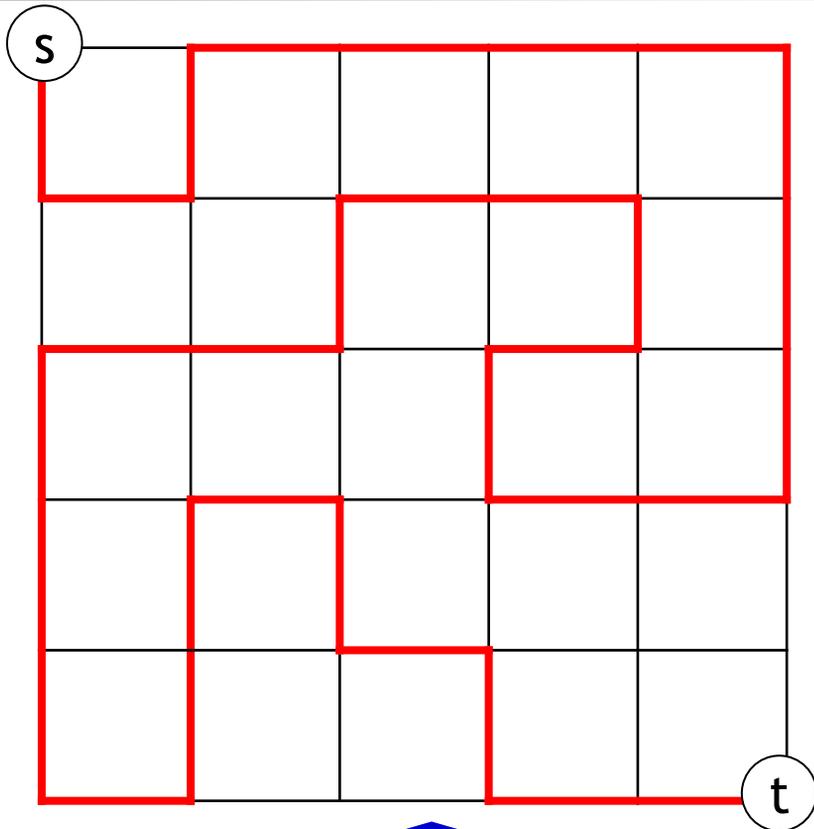
## マルコフ連鎖モンテカルロ法のアイデア

1. 目的の分布を定常分布にもつマルコフ連鎖を設計.
2. 十分な回数推移させ、極限分布からサンプリング.

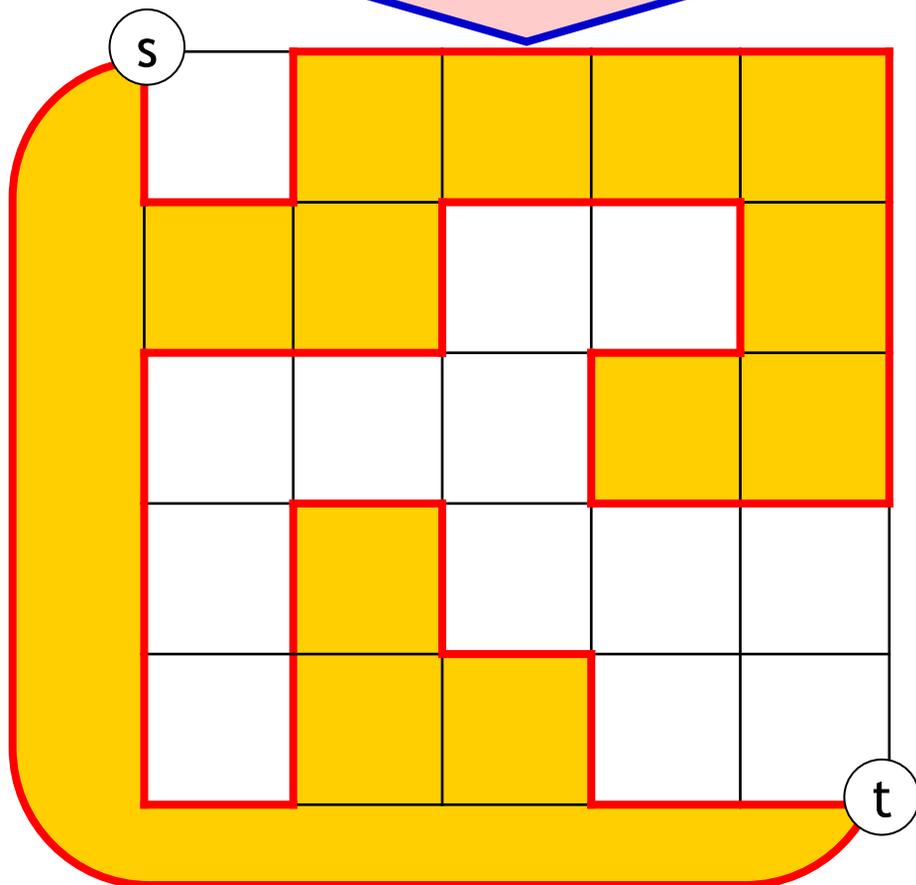
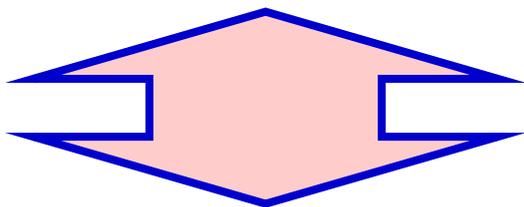


漸近的に定常分布

# 準備: $s$ - $t$ 単純経路の表現

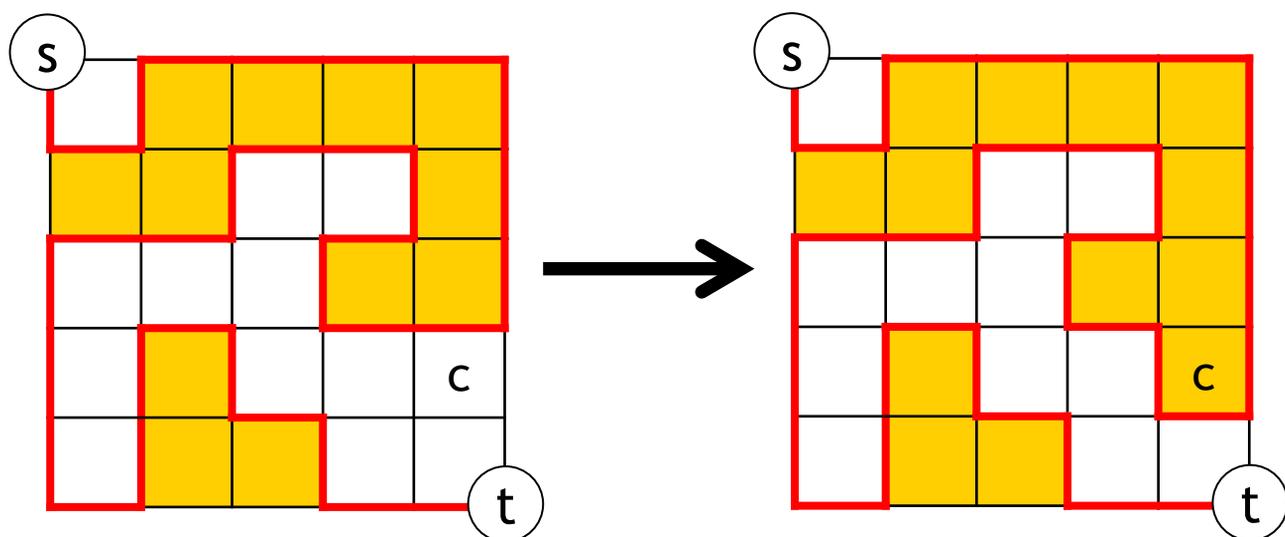


$s$ - $t$ 単純経路



単連結な色塗り

# マルコフ連鎖の状態遷移



## マルコフ連鎖MC

状態空間:  $\Xi_k$ ,

状態遷移:  $X \rightarrow X'$ は以下のように定められる;

1. セルcを一様ランダムに選ぶ.
2. 状態YをXのセルcを反転したものとする.
3.  $Y \in \Xi_k$ なら $X' = Y$ , そうでなければ $X' = X$ とする.

### Check!

- Y(の境界線)はs-t経路
- 長さk以下

実装上は高速化のため、  
もう少しべたに場合分けする。

# 極限分布

## 定理

マルコフ連鎖MCの極限分布は $\mathcal{E}_k$ 上の一様分布

## 証明の概略

- マルコフ連鎖MCは既約 ( $\mathcal{E}_k$ 上で(強)連結)
- マルコフ連鎖MCは非周期的
- マルコフ連鎖MCは詳細釣り合の式
$$\forall X, Y \in \mathcal{E}_k, \Pr(X \rightarrow Y) = \Pr(Y \rightarrow X)$$
を満たす。

## MCMC法設計の常套手段

- 既約で非周期的な有限状態マルコフ連鎖は一意的な極限分布をもつ。
- 詳細釣り合の式
$$\forall X, Y \in S, \Pr(X \rightarrow Y) = \Pr(Y \rightarrow X)$$
を満たせば、定常分布は $S$ 上の一様分布

マルコフ連鎖MCのmixing time( $\tau$ )は未解決

# 計算機実験

マルコフ連鎖の遷移回数	$\tau = 30$
サンプリング回数	$M = 10^7$

(近似解は5回の平均)

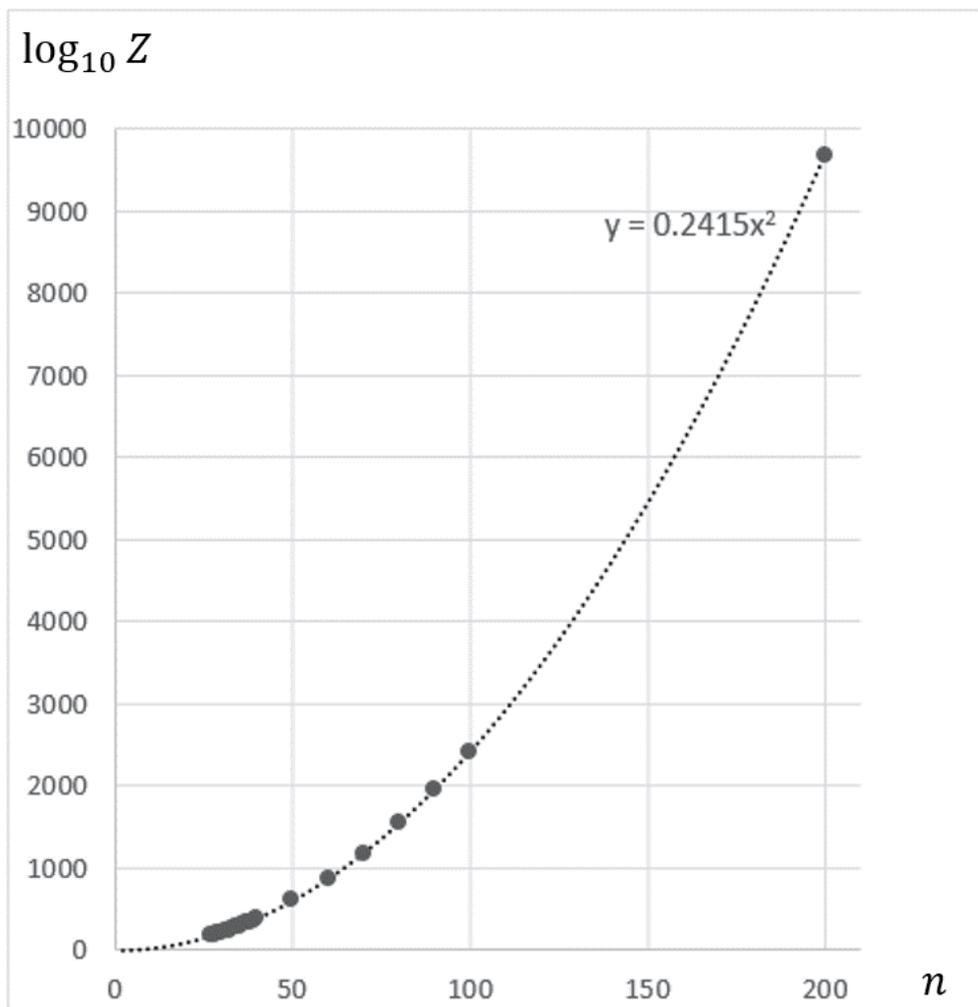
$n$	真の解*	近似解	実行時間
25	$8.40 * 10^{150}$	$8.55 * 10^{150}$	1h 27m
26	$1.74 * 10^{163}$	$1.78 * 10^{163}$	1h 33m
30	unknown	$2.09 * 10^{217}$	2h 4m
50	unknown	$6.35 * 10^{603}$	5h 44m
100	unknown	$6.07 * 10^{2415}$	23h 20m
200	unknown	$1.196 * 10^{9667}$	96h

実行時間(理論値)は  $O(M\tau n^2)$

# おねえさんに教えてあげたい...

経路の総数はおよそ  $10^{0.2415n^2} \simeq 1.744^{n^2}$  個

(予想)



$n$  と  $\log_{10} Z$  の関係

格子数  $n \times n$  における経路数  $Z$

● :  $n = 1 \sim 26$  の正しい経路数

● :  $n = 1 \sim 200$  の近似値

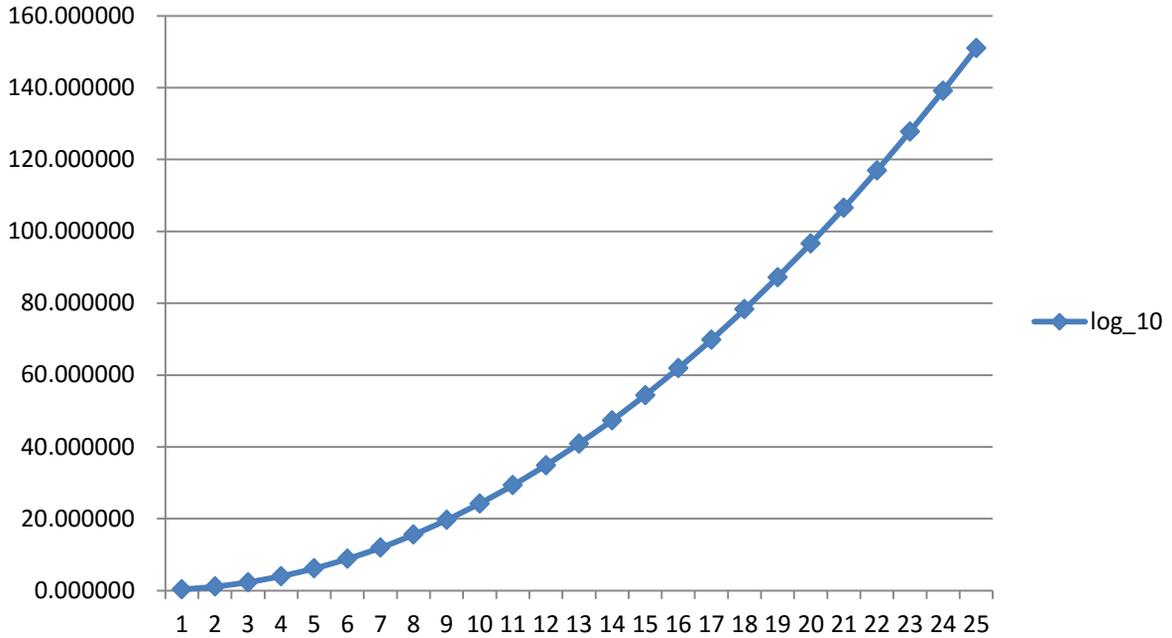
..... : 放物線  $y = 0.2415x^2$

$\sqrt{3}$ 予想 ( $|\Omega| \geq \sqrt{3}^{n^2}$ )

	$ \Omega $	$\log_{10} \Omega $	$\frac{\log_{10} \Omega }{n^2}$
1	2	0.301030	0.301030
2	12	1.079181	0.269795
3	184	2.264818	0.251646
4	8512	3.930032	0.245627
5	1262816	6.101340	0.244054
6	575780564	8.760257	0.243340
7	7.8936E+11	11.897275	0.242802
8	3.2666E+15	15.514096	0.242408
9	4.10442E+19	19.613252	0.242139
10	1.56876E+24	24.195556	0.241956
11	1.82413E+29	29.261056	0.241827
12	6.4528E+34	34.809748	0.241734
13	6.94507E+40	40.841676	0.241667
14	2.2745E+47	47.356885	0.241617
15	2.26675E+54	54.355403	0.241580
16	6.87454E+61	61.837244	0.241552
17	6.34481E+69	69.802419	0.241531
18	1.78211E+78	78.250935	0.241515
19	1.52334E+87	87.182798	0.241504
20	3.96289E+96	96.598012	0.241495
21	3.1375E+106	106.496580	0.241489
22	7.5597E+116	116.878505	0.241485
23	5.5435E+127	127.743787	0.241482
24	1.2372E+139	139.092430	0.241480
25	8.403E+150	150.924433	0.241479

# $\sqrt{3}$ 予想 ( $|\Omega| \geq \sqrt{3}^{n^2}$ )

## $\log_{10}|\Omega|$ のプロット



## $\frac{\log_{10}|\Omega|}{n^2}$ のプロット

