大学院システム情報科学府 基礎共通科目 2018 年 12 月 7 日

確率・統計特論 第10回

来嶋 秀治 (Shuji Kijima)

注意: 参照した文献等の情報を必ず記載すること.

<u>今日の話題:</u> 区間推定/仮説検定

(Student の)t **統計量** (Student's t statistics)

$X_1, \ldots, X_n$ は独立同一分布に従い, 期待値は μ, 分散は σ^2 とする.

Remember: (中心極限定理) $\overline{X} := \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ とすると, $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$ は正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従う.

いま, $s^2 := \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$(不偏標本分散) とする. 確率変数 $t := \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$ を (Student の)t **統計量** (Student's t statistics) という.

Q: t の従う分布は? A: 正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ から少しずれる. なぜなら,

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{s^2}} = Z \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{s^2}}$$

となり, Z は正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従うが, 確率変数 $\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{s^2}}$ の影響を考慮する必要がある.

命題 1. 確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は独立に正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従うものとする. このとき $Z := X_1^2 + \cdots + X_n^2$ がガンマ分布 $\mathrm{G}(1/2, n/2)$ に従う.

remark: ガンマ分布 $\mathrm{G}(\alpha, \nu)$ ($\alpha > 0$, $\nu > 0$) の密度関数は

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\nu)} \alpha^{\nu} x^{\nu-1} \mathrm{e}^{-\alpha x} & (x \geq 0), \\ 0 & (x < 0), \end{cases}$$

で与えられる. ただし $\Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} t^{\nu-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$.

特に $\mathrm{G}(1/2, n/2)$ を**自由度** n **の** χ^2 **分布** (**カイ二乗分布**; *chi-square distribution*) という.

命題 2. 確率変数 X が正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従い, 確率変数 Y がガンマ分布 $\mathrm{G}(1/2, n/2)$ に従い, X と Y は独立とする. このとき $T := X/\sqrt{Y/n}$ は次の密度関数

$$f_T(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

に従う.

特に密度関数 $f_T(x)$ で定められる分布を**自由度** n **の** t **分布** (*t-distribution*) という.

命題 3. $X_1, \ldots, X_n$ が正規分布（$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$）に従うとき，$t$ 検定量は自由度 $n-1$ の t 分布に従う.

命題 4. $X_1, \ldots, X_n$ が正規分布（$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$）に従うとき，$\chi^2 := \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2}$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従う.

仮説検定: 用語

帰無仮説 (*null hypothesis*), 対立仮説 (*alternative hypothesis*)

あらかじめ指定した $\alpha \in (0,1)$ に対して,

$$\begin{aligned} \Pr[\text{帰無仮説が起こる}] < \alpha \quad &\Longrightarrow \quad \text{有意水準 } \alpha \text{ で帰無仮説を棄却する} \\ \Pr[\text{帰無仮説が起こる}] \geq \alpha \quad &\Longrightarrow \quad \text{有意水準 } \alpha \text{ で帰無仮説を棄却しない} \end{aligned}$$

t 検定 (1 標本期待値+両側検定の場合) 標本値 $X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n$ が与えられたとき, $\mathrm{E}[X]$ の推定量として b という値の妥当性について統計的推論を行う. 確率変数 $t := \frac{\overline{X}-b}{\sqrt{s^2/n}}$ は (自由度 $n-1$ の)t 分布に従うので,

$$\begin{aligned} \Pr[\text{帰無仮説:}\, \mathrm{E}[X]=b] &= \Pr\left[|\overline{X}-b| \geq |\overline{a}-b| \mid \mathrm{E}[X]=b\right] \\ &= \int_{-\infty}^{-\frac{|\overline{a}-b|}{\sqrt{s^2/n}}} f_t(x)\mathrm{d}x + \int_{+\frac{|\overline{a}-b|}{\sqrt{s^2/n}}}^{+\infty} f_t(x)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{1}$$

となる. (1)$< \alpha$ なら $\mathrm{E}[X]=b$ という帰無仮説は有意水準 α で棄却され, (1)$\geq \alpha$ の場合は棄却されない.

ちなみに $z_\alpha (>0)$ を $\int_{-z_\alpha}^{+z_\alpha} f_T(x)\mathrm{d}x = 1-\alpha$ を満たす値とすると, $\frac{|\overline{a}-b|}{\sqrt{s^2/n}} > z_\alpha$ なら帰無仮説は有意水準 α で棄却され, そうでなければ棄却されない. たとえば $n=10$, $\alpha=0.05$ の場合, $z_\alpha = 2.262$ となり, 十分大きな n に対して, $\alpha = 3/10^6$ の場合, $z_\alpha \simeq 4.5$ となる.

χ^2 検定 (1 標本分散+片側検定の場合) 標本値 $X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n$ が与えられたとき, $\mathrm{Var}[X]$ の推定量として c^2 という値の妥当性について統計的推論を行う. 確率変数 $S := \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2/c^2$ は (自由度 $n-1$ の)χ^2 分布に従うので,

$$\Pr[\text{帰無仮説:}\, \mathrm{Var}[X]=c^2] = \Pr[S \geq c^2 \mid \mathrm{Var}[X]=c^2] = \int_{c^2}^{+\infty} f_{\chi^2}(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

となる. (2)$< \alpha$ なら $\mathrm{Var}[X]=c^2$ という帰無仮説は有意水準 α で棄却され, (2)$\geq \alpha$ の場合は棄却されない.

演習問題

***演習 1.** さいころを 180 回振った. 1 の目が出た回数が 36 回であった. よって 1 の目が出る確率は 1/5 と推定された. このさいころは公正ではないと言えるだろうか？

***演習 2.** ある年の 8 月上旬の東京と大阪の気温は以下の通りであった.

日付	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
東京	32.1	26.2	27.5	31.8	32.1	31.2	30.1	32.4	32.3	29.9
大阪	35.4	34.6	31.1	32.4	33.3	34.7	35.3	34.3	32.1	28.3

東京は大阪より暑いと言えるか?

***演習 3.** A 社ではボールを作成している. 規格ではボールの重さは 170[g] となっている. 15 個の製品を抜き取り検査を行ったところ, 標本平均 169.4[g], 標本分散 $(1.0[\mathrm{g}])^2$ であった.
(i) この標本平均は規格から外れているか? 有意水準 5%で議論せよ.
(ii) A 社の規格では分散は $(0.8[\mathrm{g}])^2$ としている. 標本はこの規格から外れているか？ 有意水準 1%で議論せよ.

† **演習 4.** 命題 1 を示せ.

† **演習 5.** 命題 2 を示せ.