大学院システム情報科学府 基礎共通科目 2018 年 11 月 30 日

確率・統計特論 第 9 回

来嶋 秀治 (Shuji Kijima)

注意: 参照した文献等の情報を必ず記載すること.

今日の話題:

1. 最尤推定:

定義. 確率変数 $X_1,\dots,X_n$ は独立に同一の密度関数 $f(x;\theta)$ に従うとし, $(X_1,\dots,X_n)$ の同時分布の密度関数を

$$f(x_1,\dots,x_n;\theta) := f(x_1)\cdot\cdots\cdot f(x_n)$$

とする.

標本値 $X_1 = x_1,\dots,X_n = x_n$ が与えられた時, 関数

$$L(\theta \mid x_1,\dots,x_n) := f(x_1,\dots,x_n;\theta)$$

を**尤度関数** (*likelihood function*) と言い,

$$\theta^* := \arg\max_{\theta} L(\theta \mid x_1,\dots,x_n)$$

を**最尤推定量** (*maximum likelihood estimator*) と言う. 関数 $\log\left(L(\theta \mid x_1,\dots,x_n)\right)$ を**対数尤度関数** (*logarithmic likelihood function*) と言い, 最尤推定量の計算にしばしば用いられる.

命題 1. 密度関数 f は正, すなわち任意の x に対して $f(x) \gneq 0$, とすると. θ^* が最尤推定量であるための必要十分条件は

$$\theta^* := \arg\max_{\theta} \log\left(L(\theta \mid x_1,\dots,x_n)\right).$$

命題 2. 確率変数 X は密度関数 $f(x;\theta)$ に従うとし, $f(\boldsymbol{x};\theta)$ は正かつ (θ に関して)2 回微分可能とする. このとき,

$$\mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X,\theta)\right)^2\right] = -\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(X,\theta)\right]$$

が成り立つ.

定義. ($f(x;\theta)$ の) **フィッシャー情報量** (*Fisher Information*) を

$$I(\theta) := \mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X,\theta)\right)^2\right] = -\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(X,\theta)\right],$$

と定義する. ただし 2 つめの等式は命題 2 より得る.

命題 3. 密度関数 $f(x;\theta)$ は正かつ (θ に関して)2 回微分可能とし, θ^* は母パラメータ θ_{o} の最尤推定量とする. 確率変数 $\sqrt{n}(\theta^* - \theta_{\mathrm{o}})$ は $n \to +\infty$ で $\mathrm{N}(0, 1/I(\theta_{\mathrm{o}}))$ に収束する.

命題 4. (クラメール・ラオの不等式; Cramer-Rao's lower bound) 確率変数 $X_1,\dots,X_n$ は独立に同一の密度関数 $f(x;\theta_{\mathrm{o}})$ に従うとし, $I(\theta)$ は $f(x;\theta)$ のフィッシャー情報量を表す. いま $\widehat{\theta}$ が θ_{o} の不偏推定量であれば,

$$\mathrm{Var}[\widehat{\theta}] \geq \frac{1}{nI(\theta)}$$

が成り立つ.

演習問題

***演習 1.** $X_1, \ldots, X_n$ が独立に Bernoulli 分布 $\mathrm{B}(1;p)$ に従うとする. 標本値 $x_1, \ldots, x_n$ に対し, p の最尤推定量を求めよ. また, それは一致推定量, 不偏推定量であるか?

演習 2. $X_1, \ldots, X_n$ が独立に正規分布 $\mathrm{N}(\mu;\sigma^2)$ に従うとする. 標本値 $x_1, \ldots, x_n$ に対し, μ, σ^2 の最尤推定量を求めよ. また, それは一致推定量, 不偏推定量であるか?

演習 3. 命題 2 を示せ.

演習 4. 次の分布のフィッシャー情報量を求めよ.
(*i) Bernoulli distribution $\mathrm{B}(1;p)$.
(*ii) 指数分布 $\mathrm{Ex}(\lambda)$.
(iii) 正規分布 $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$.