# 確率・統計特論 第 8 回

来嶋 秀治 (Shuji Kijima)

**注意:** 参照した文献等の情報を必ず記載すること.

今日の話題:

**定義.** $T$ が $\theta$ の**一致推定量** (*consistent estimator*) とは, $\lim_{n \to +\infty} \Pr([T] = \theta) = 1$ が成り立つことをいう.

**定義.** $T$ が $\theta$ の**不偏推定量** (*unbiased estimator*) とは, $\mathrm{E}[T] = \theta$ が成り立つことをいう.

**定義.** $\theta$ の推定量 $T$ に対し, $\mathrm{E}[(T-\theta)^2]$ を**平均二乗誤差** (*mean square error*) という.

復習:

**命題.** 連続確率変数 $X, Y$ は独立とし，それぞれ密度関数 $f_X, f_Y$ に従う．このとき，$X, Y$ の同時密度 $f_{XY}$ は $f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ を満たす.

演習問題

***演習 1.** $X_1, \ldots, X_n$ が独立同一分布に従うとき, $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$ が母分散の不偏推定量であることを示せ. ただし, $\overline{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ とする.

***演習 2.** 命題を示せ.

**† 演習 3.** 確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は独立に正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従うものとする. このとき $Z := X_1^2 + \cdots + X_n^2$ がガンマ分布 $\mathrm{G}(1/2, n/2)$ に従うことを示せ.
remark: ガンマ分布 $\mathrm{G}(\alpha, \nu)$ $(\alpha > 0,\ \nu > 0)$ の密度関数は

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\nu)} \alpha^\nu x^{\nu-1} \mathrm{e}^{-\alpha x} & (x \geq 0), \\ 0 & (x < 0), \end{cases}$$

で与えられる. ただし $\Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} t^{\nu-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

**† 演習 4.**
確率変数 $X$ が正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従い, 確率変数 $Y$ がガンマ分布 $\mathrm{G}(1/2, n/2)$ に従い, $X$ と $Y$ は独立とする. このとき $T := X/\sqrt{Y/n}$ は次の密度関数

$$f_T(t) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

に従うことを示せ.