大学院システム情報科学府 基礎共通科目　　2018 年 11 月 2 日

確率・統計特論 第5回

来嶋 秀治 (Shuji Kijima)

注意: 参照した文献等の情報を必ず記載すること.

今日の話題:

命題. いま $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $b \in \mathbb{R}$ とする. 連続分布に従う確率変数 X は密度関数 f_X を持つとし, $Y := aX + b$ とすると, Y の密度関数 f_Y は

$$f_Y(t) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

観察. 連続分布に従う確率変数 X と Y は独立とし, f_X, f_Y をそれぞれの密度関数とする. いま, $Z := X + Y$ とすると, Z の密度関数 f_Z は

$$f_Z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(s) f_Y(t-s) \mathrm{d}s.$$

定義.
(i) 非負整数値をとり, 確率関数 f をもつ確率変数 X に対し, **確率母関数** (*probability generating function*) $g(z)$ は以下に定義される;

$$g(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{E}[z^X] = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k f(k) \quad (-1 < z < 1).$$

(ii) 確率変数 X (連続分布, 離散分布を問わない) に対し, **積率母関数** (*moment generating function*) $M(\theta)$ は以下に定義される;

$$M(\theta) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\theta X}] \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

(iii) 確率変数 X (連続分布, 離散分布を問わない) に対し, **特性関数** *characteristic function* $\varphi(\theta)$ は以下に定義される;

$$\varphi(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{E}[\mathrm{e}^{itX}] \quad (t \in \mathbb{R}).$$

ただし, i は虚数単位である.

命題.
(i) $g(1) = 1$. $g'(1) = \mathrm{E}[X]$. $g''(1) = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]$.
(ii) $M^{(k)}(0) = \mathrm{E}[X^k]$.
(iii) $\varphi^{(k)}(0) = \mathrm{E}[(iX)^k]$.

定理. 確率変数 X と Y は独立とし, $M_X(\theta)$, $M_Y(\theta)$ はそれぞれの積率母関数とする. いま, $Z := X + Y$ とすると, Z の積率母関数 M_Z は $M_Z(\theta) = M_X(\theta) M_Y(\theta)$.

定理. 確率変数 X と Y はそれぞれ分布 F_X, F_Y に従うものとし, $M_X(\theta)$, $M_Y(\theta)$ はそれぞれの積率母関数とする. もし $M_X(\theta) = M_Y(\theta)$ ならば, $F_X = F_Y$.

演習 (*は基礎的な問題．)

***演習 1.**　下記の分布について, 積率母関数を求めよ．

(i) 2 点分布 $\mathrm{B}(1;p)$

(ii) 2 項分布 $\mathrm{B}(n;p)$

(iii) 幾何分布 $\mathrm{Ge}(p)$

(*iv) ポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$

(v) 指数分布 $\mathrm{Ex}(\alpha)$

(*vi) 正規分布 $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$

***演習 2.** 確率変数 X と Y は独立とし, X は $\mathrm{G}(\alpha,\nu_1)$, Y は $\mathrm{G}(\alpha,\nu_2)$ に従う．ただし ν_1,ν_2 は正の整数とする．確率変数 $Z := X+Y$ の従う分布の密度関数を求めよ．

***演習 3.** 確率変数 X と Y は独立とし, X は $\mathrm{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$, Y は $\mathrm{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$ に従う．確率変数 $Z := X+Y$ の従う分布の密度関数を求めよ．

演習 4.

(i) いま, $a\in\mathbb{R}_{>0}$, $b\in\mathbb{R}$ とし, X は $N(\mu,\sigma^2)$ に従う．確率変数 $Y := aX+b$ の従う密度関数を求めよ．

(ii) いま $X_1,\dots,X_n$ は独立同一分布に従うとし, 期待値は μ 分散は σ^2 とする．確率変数 $Z := (X_1+\cdots+X_n)/n$ の従う分布の密度関数を求めよ．

ヒント．中心極限定理を使え．