大学院システム情報科学府 基礎共通科目　　　2018 年 10 月 26 日

# 確率・統計特論 第 4 回

来嶋 秀治 (Shuji Kijima)

**注意:** 参照した文献等の情報を必ず記載すること.

## 1. 確率不等式

**定理 1.** (Markov's inequality; マルコフの不等式) 非負の確率変数 $X$ は, 任意の $a > 0$ に対して

$$\Pr[X \geq a] \leq \frac{\mathrm{E}[X]}{a}$$

を満たす.

**定理 2.** (Chebyshev's inequality, チェビシェフの不等式) 確率変数 $X$ は任意の $a > 0$ に対して

$$\Pr[|X - \mathrm{E}[X]| \geq a] \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{a^2}$$

を満たす.

**系 3.** 確率変数 $X$ は任意の $t > 1$ に対して

$$\begin{aligned}
\Pr\left[|X - \mathrm{E}[X]| \geq t \cdot \sigma[X]\right] &\leq \frac{1}{t^2}, \\
\Pr\left[|X - \mathrm{E}[X]| \geq t \cdot \mathrm{E}[X]\right] &\leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{t^2(\mathrm{E}[X])^2},
\end{aligned}$$

を満たす.

## 2. 大数の法則，中心極限定理

**定義 4.** 確率変数の列 $\{X_n\}$ が $X$ に**確率収束する** (*converge in probability*) とは,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \lim_{n \to +\infty} \Pr[|X_n - X| < \varepsilon] = 1.$$

**定理 5.** (大数の法則) 確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は独立同一分布に従うとし, 期待値 $\mu$, 分散 $\sigma^2$ とする．このとき, $(X_1 + \cdots + X_n)/n$ は $\mu$ に確率収束する．すなわち,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \lim_{n \to +\infty} \Pr\left[\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| < \varepsilon\right] = 1.$$

**定義 6.** 密度関数 $\{F_n\}$ をもつ確率変数の列 $\{X_n\}$ が $X$ に**分布収束する** (*converge in distribution*) とは, $\lim_{n \to +\infty} F_n = F$ が成り立つことを言う．ただし $F$ は $X$ の密度関数である．$X_n$ は $F$ に分布収束する, $F_n$ は $F$ に分布収束する, などとも言う．

**定理 7.** (中心極限定理) 確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は独立同一分布に従うとし, 期待値 $\mu$ と分散 $\sigma^2$ を持つとする．いま, $Z_n \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ とすると, $Z_n$ は $\mathrm{N}(0,1)$ に分布収束する．すなわち,

$$\lim_{n \to +\infty} F[Z_n \leq z] = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2n}} \mathrm{e}^{-x^2/2} \mathrm{d}x.$$

演習 (*は基礎的な問題.)

***演習 1.**　表の出る確率が 1/3 のコインを $n$ 回投げ, 表の出た回数を考える. 確率変数 $X_i$ は $i$ 回目のコイントスに対して,

$$X_i \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} 1 & \text{(head)}, \\ 0 & \text{(tail)}, \end{cases}$$

と定義する. $X \overset{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^{n} X_i$ とする.
(i) $\mathrm{E}[X]$ と $\mathrm{Var}[X]$ を求めよ.
(ii) $X \geq n/2$ となる確率の上界を Markov's inequality を用いて求めよ.
(iii) $X \geq n/2$ となる確率の上界を Chebyshev's inequality を用いて求めよ.

***演習 2.**　(幾何分布) 表の出る確率が $p$ のコインを繰り返し投げ表が出る前に裏の出た回数を $X$ とする.
(i) $\Pr[X = k]$ を求めよ.
(ii) $\mathrm{E}[X]$ を求めよ.
(iii) $\mathrm{Var}[X]$ を求めよ.

**演習 3.**　(マルコフの不等式) 正整数 $k$ が与えられた時,

$$\Pr[X \geq k \cdot \mathrm{E}[X]] = \frac{1}{k}$$

となるような確率変数 $X$ で非負の値だけを取るものは存在するか? すなわち, マルコフの不等式が最適な評価となり得る例を示す問題である.