確率・統計特論 第3回

来嶋 秀治 (Shuji Kijima)

注意: 参照した文献等の情報を必ず記載すること.

今日の話題:

1. さまざまな連続分布.

(i) 一様分布 (uniform dist.) $\mathrm{U}(a,b)$ $(a<b)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & (a\le x\le b),\\ 0 & (\text{それ以外}).\end{cases}$$

(ii) 指数分布 (exponential dist.) $\mathrm{Ex}(\lambda)$ $(\lambda>0)$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & (x\ge 0),\\ 0 & (x<0).\end{cases}$$

(iii) 正規分布 (normal dist.) $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ $(-\infty<\mu<+\infty,\ \sigma>0)$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

(iv) ベータ分布 (beta dist.) $\mathrm{Be}(\alpha,\beta)$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & (0\le x\le 1),\\ 0 & (\text{それ以外}).\end{cases}$$

ただし $B(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\mathrm{d}t$.

(v) ガンマ分布 (gamma dist.) $\mathrm{G}(\theta,k)$ $(\theta>0,\ k>0)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(k)}\cdot\dfrac{x^{k-1}\mathrm{e}^{-x/\theta}}{\theta^k} & (x\ge 0),\\ 0 & (x<0).\end{cases}$$

ただし $\Gamma(k)=\int_0^{+\infty} t^{k-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

2. 同時分布，独立同一分布

確率変数 X と Y に対して，(X,Y) の従う分布を**同時分布**（*joint distribution*; 結合分布とも）という．$F(x,y):=\Pr((X\le x),(Y\le y))$ を同時分布関数と言う．X, Y が離散確率変数の場合は，$f(x,y):=\Pr((X=x),(Y=y))$ を同時確率関数と言う．X,Y が連続確率変数の場合は，$f(x,y):=(\partial^2/\partial x\partial y)F(x,y)$ を同時密度関数と言う．

X と Y が独立であるとは，$F_{XY}(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$ が成り立つことをいう．X と Y が独立のとき，$f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ が成り立つ．

独立同一分布 (i.i.d.) 2 つの確率変数 X と Y が**独立同一分布に従う** (*i.i.d.*; independent and identically distributed) とは, X と Y が同一の分布に従い, かつ X と Y が独立であることをいう.

3. 確率変数の期待値, 分散, 共分散, 積率.

実数値をとる離散確率変数 X の**期待値** (*expectation*) $\mathrm{E}(X)$ は X の確率関数 $f(x)$ に対して,

$$\mathrm{E}[X]\overset{\text{def.}}{=}\sum_{x\in\mathbb{R}}x\cdot f(x).$$

ただし右辺の無限和が**絶対収束** (*converges absolutely*; $\sum_{x\in\mathbb{R}}|x\cdot f(x)|<+\infty$) する場合に限る.
右辺が絶対収束しない場合は「X の期待値は存在しない」という.

同様に, 実数値をとる連続確率変数 X の期待値 $\mathrm{E}[X]$ は X の確率密度関数 $f(x)$ に対して,

$$\mathrm{E}[X]\overset{\text{def.}}{=}\int_{x\in\mathbb{R}}x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x.$$

実数値をとる確率変数 X の**分散** (*variance*) $\mathrm{Var}(X)$ は

$$\mathrm{Var}[X] \overset{\text{def.}}{=} \mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}[X])^2\right].$$

実数値をとる確率変数 X と Y の**共分散** (*covariance*) $\mathrm{Cov}[X,Y]$ は

$$\mathrm{Cov}[X,Y] \overset{\text{def.}}{=} \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])].$$

実数値をとる確率変数 X の k 次の**積率** (k-th *moment*) を $\mathrm{E}[X^k]$ と定義する.

定理 1. (期待値、分散、共分散の性質)

(i) 定数 c に対して,

$$\mathrm{E}[c]=c, \quad \mathrm{E}[c\cdot X]=c\cdot\mathrm{E}[X], \quad \mathrm{E}[X+c]=\mathrm{E}[X]+c,$$
$$\mathrm{Var}[c]=0, \quad \mathrm{Var}[c\cdot X]=c^2\cdot\mathrm{Var}[X], \quad \mathrm{Var}[X+c]=\mathrm{Var}[X],$$

(ii) $\mathrm{E}[X+Y]=\mathrm{E}[X]+\mathrm{E}[Y]$ (**期待値の線形性**),

(iii) $\mathrm{Var}[X]=\mathrm{E}[X^2]-(\mathrm{E}[X])^2$, $\mathrm{Cov}[X,Y]=\mathrm{E}[XY]-\mathrm{E}[X]\cdot\mathrm{E}[Y]$,

(iv) $\mathrm{Var}[X+Y]=\mathrm{Var}[X]+2\cdot\mathrm{Cov}[X,Y]+\mathrm{Var}[Y]$.

定理 2. 確率変数の対 X と Y は独立とすると,

(i) $\mathrm{E}[XY]=\mathrm{E}[X]\cdot\mathrm{E}[Y]$,

(ii) $\mathrm{Cov}[X,Y]=0$,

(iii) $\mathrm{Var}[X+Y]=\mathrm{Var}[X]+\mathrm{Var}[Y]$.

演習

演習 1. 以下の確率分布の期待値と分散を求めよ.

(*i) 2 点分布 $\mathrm{B}(1;p)$
(*ii) 2 項分布 $\mathrm{B}(n;p)$
(iii) 幾何分布 $\mathrm{Ge}(p)$
(iv) ポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$
(*v) 指数分布 $\mathrm{Ex}(\alpha)$
(vi) 正規分布 $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$

***演習 2.** 定理 1,2 を示せ.

演習 3. 以下の確率変数 X の期待値は存在するか?

(i) 離散確率変数 X は次の確率関数に従うとする.

$$f(x) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} \dfrac{1}{2^k} & (x=(-2)^k\ (k\in\{1,2,\dots\})), \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

(ii) 連続確率変数 X は以下の密度関数

$$f(x) \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\alpha}{(x-\mu)^2+\alpha^2}$$

で定義される**コーシー分布** (*Cauchy dist.*) $\mathrm{C}(\mu,\alpha)$ に従う.