2018 年 10 月 10 日

確率・統計特論 第 1 回

来嶋 秀治 (Shuji Kijima)

金曜 1 限 (8:40–10:10), 工学部第 1 講義室
Office hour: 金曜日 15:30–17:30, Office: W2 号館 7F 741
web(演習資料): `http://tcslab.csce.kyushu-u.ac.jp/~kijima/`
mail: `kijima@inf.kyushu-u.ac.jp`

注意: 参照した文献等の情報を必ず記載すること.

今日の話題

確率空間 (Probability Space) 確率空間は $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義される.
Ω: 標本空間 (sample space); 標本点 (elementally events) の集合. 事象 (event) とは Ω の部分集合.
$\mathcal{F}$: σ 代数 (σ-algebra) ($\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$); 事象の集合.
P: 確率測度 (probability measure); 関数 $\mathcal{F} \to \mathbb{R}$, 事象の確率 (probability).

σ 代数 (σ-algebra) $\mathcal{F}$ が σ 代数であるとは
1. $\mathcal{F}$ は空集合を含む: $\emptyset \in \mathcal{F}$.
2. $\mathcal{F}$ は補集合に関して閉じている: $A \in \mathcal{F}$ ならば $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$.
3. $\mathcal{F}$ は可算個の和に関して閉じている: $A_i \in \mathcal{F}$ $(i = 1, 2, \ldots,)$ ならば $\bigcup_i A_i \in \mathcal{F}$.

コルモゴロフ (Kolmogolov) の公理 P が確率測度 (probability measure) であるとは
1. 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して $P(A) \geq 0$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. 加算個の排反事象 (mutual exclusive events)$A_1, A_2, \ldots$ は

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

を満たす.

定理 1. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に対して, 以下が成り立つ.
(*i) $P(\emptyset) = 0$
(*ii) $A \subseteq B$ $(A, B \in \mathcal{F})$ ならば, $P(B \setminus A) = (P(B) - P(A))$. (注: $B \setminus A \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \in B \mid x \notin A\}$ である.)
(*iii) $A \subseteq B$ $(A, B \in \mathcal{F})$ ならば, $P(A) \leq P(B)$.
(*iv) 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して, $P(A) \leq 1$.
(*v) 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. (注: $\overline{A}$ は A の補集合を表す, i.e., $\overline{A} \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$.)
(vi) 任意の $A, B \in \mathcal{F}$ に対して, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. (関数 P はモジュラ性をもつ.)
(vii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ ならば, $P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n)$.
(viii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ ならば, $P\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n)$.
(ix) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ に対して, $P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = 0 \Leftrightarrow \forall n \geq 1,\ P(A_n) = 0$.

用語 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に定義された写像 $X\colon \Omega \to \Xi$ が, Ξ の σ-代数 $\mathcal{G}$ に対して $\{\omega \mid \forall B \in \mathcal{G},\ X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ を満たすとき, $X(\omega)$ を確率変数 (random variable) という.[1] 省略して, 確率変数 $X(\omega)$ を単に X と記述することが多い.

[1] 平たく言うと, 確率変数 X は Ξ の要素であり, 確率的に起こる事象 $A \in \mathcal{F}$ に依存して (すなわち確率 $P(A)$ で) 定まる変数である.

Exercises

***Ex. 1. コインの表の数** 4枚の10円玉を投げ，表の出た枚数を数える．ただし，4枚の10円玉は見分けがつかないものとする．
(i) 標本空間を記述せよ.
(ii) すべての観測事象を記述せよ.
(iii) 表の出る確率がそれぞれ1/2であるとき, 確率測度を記述せよ.

Ex. 2. 3種類のコイントス 3枚の硬貨を投げ，各硬貨の表裏を確認する．ただし，1枚は1円玉，1枚は10円玉，残りの1枚は100円玉で，当然見分けがつく．
(i) 標本空間を記述せよ.
(ii) すべての観測事象を記述せよ.
(iii) 表の出る確率がそれぞれ1/2であるとき, 確率測度を記述せよ.

Ex. 3. Bertrandのパラドックス
「円Cの内接三角形の1辺の長さをxとする.Cの弦がランダムに与えられるとき, 弦の長さがxより大きくなる確率は?」
3つの解析方法における確率空間を述べよ.

Ex. 4. 定理1をコルモゴロフの公理から導け.

参考文献
[1] 藤澤洋徳, 確率と統計, 朝倉出版, 2006.
確率
[2] 伏見正則, 確率と確率過程, 朝倉書店, 2004.
[3] M. Mitzenmacher, E. Upfel, Probability and Computing: Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis, Cambridge University Press, 2005.
統計
[4] 日本統計学会, 統計学 (統計検定1級対応), 東京図書, 2013.
[5] 東京大学教養学部統計学教室編, 統計学入門, 東京大学出版, 1991.
[6] 東京大学教養学部統計学教室編, 自然科学の統計学, 東京大学出版会, 1992.
[7] Christopher M. Bishop, Pattern Recognition and Machine Learning, Springer, 2006.